Teorema: Seja k um corpo e R uma k-álgebra f.g. Se R é domínio, então

$$\dim(R) = \operatorname{tr.deg}_k(\operatorname{Frac} R)$$

Exemplos: 1. $\dim k[X_1, \ldots, X_n] = n$

2. Se $R / k[X_1, \ldots, X_n]$ t.q. R é $k[X_1, \ldots, X_n]$ - módulo finito, então

$$\dim R = n.$$

Teorema: Seja k um corpo, R é uma k-álgebra f.g. e $\mathfrak{p} \subset R$ um ideal primo e $\mathfrak{m} \subset R$ um ideal maximal.

Então

$$\dim R = \dim R_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p}$$

$$\dim R = \dim R_{\mathfrak{m}}$$

Def: Se $M \in R\text{-mod}$. Diz-se que M é **catenário** se $\forall \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ primos em R t.q. $\mathrm{Ann}(M) \subset \mathfrak{p}$, temos: todas a cadeias maximais de primos da forma

$$(*) \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_r = \mathfrak{q}$$

têm o mesmo comprimento

Teorema: Toda k-álgebra f.g. é catenária

Dem: Comprimento de uma cadeia como em $(*)$ que seja maximal

$$= \dim(R_{\mathfrak{q}} / \mathfrak{p} R_{\mathfrak{q}})$$

$$= \dim\left((R/\mathfrak{p})\,\mathfrak{q}/\mathfrak{p}\right) \qquad \begin{array}{c} R/\mathfrak{q} \\ \shortparallel \end{array}$$

$$= \dim(R/\mathfrak{p}) - \dim\left(R/\mathfrak{p}\,/\,\mathfrak{q}/\mathfrak{p}\right)$$

$$= \dim(R/\mathfrak{p}) - \dim(R/\mathfrak{q}).$$

$\square$

Módulos Noetherianos : $R \equiv$ anel

Prop: ASASE (sobre um anel R)

1. R satisfaz a condição das cadeias ascendentes (CCA): se

$$\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_j \subset \cdots$$

são ideais em R, então $\exists j$ t.q.

$\mathfrak{a}_j = \mathfrak{a}_{j+1} = \cdots$

2. Todo o conjunto ñ vazio de ideais de R tem um elemento maximal (relativo inclusão).

3. Todo o ideal $\mathfrak{a} \subset R$ é f.g.

Def: Se R satisfaz as cond. acima, diz-se que R é Noetheriano.

Exemplos: 1. $\mathbb{Z}$ é Noetheriano.

2. Se R é AIP, então R é Noetheriano. Em particular, os corpos são Noetherianos.

3. $K[X_1, X_2, \dots, X_n, \dots]$ não é Noetheriano pois

$$\langle X_1, \dots, X_n, \dots \rangle \quad \text{não é}$$

f.g.

4. $R \subset K[X, Y]$ tq.

$$R = K[X, XY, XY^2, \dots, XY^n, \dots]$$

não é Noetheriano pois

$$\langle x, xy, xy^2, \dots, xy^n, \dots \rangle$$

é um ideal (maximal) mas não é f.g.

5. $R \subset k[x, y, y^{-1}]$ t.q.

$$R = k[x, y, xy^{-1}, xy^{-2}, \dots, xy^{-n}, \dots]$$

não Noetheriano pq

$$\langle x \rangle \subsetneq \langle xy^{-1} \rangle \subsetneq \langle xy^{-2} \rangle \subsetneq \dots \subsetneq \langle xy^{-n} \rangle$$

é uma cadeia que não estabiliza.

Dem (da Proposição):

(1) $\Leftarrow$ (2)

(1) $\Rightarrow$ (2) exercício: Sugestão

dado $S \neq \emptyset$ conj. de ideais de R t.q. S ñ tem elementos maximal, escolher

$\mathfrak{a}_0 \in S$

$\mathfrak{a}_1 \in S$ t.q. $\mathfrak{a}_0 \subsetneq \mathfrak{a}_1$

$\vdots$

(1) $\Rightarrow$ (3): Seja $\mathfrak{a} \subset R$ um ideal t.q. $\mathfrak{a} \neq \langle 0 \rangle$.

- Seja $f_0 \in \mathfrak{a} - \langle 0 \rangle$
- seja $f_1 \in \mathfrak{a} - \langle f_0 \rangle$

⋮

– seja $f_{r+1} \in \mathfrak{a} - \langle f_0, \dots, f_r \rangle$

Temos

$$\mathfrak{a}_0 \subsetneq \mathfrak{a}_1 \subsetneq \mathfrak{a}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{a}_r$$

a cadeia estabiliza, ou seja

$$\mathfrak{a} = \langle f_0, \dots, f_r \rangle$$

para algum $f_0, \dots, f_r \in \mathfrak{a}$.

(3) $\Rightarrow$ (1) claro.

$\boxtimes$

<u>Prop</u>: Se R é Noetheriano e $\mathfrak{a} \subset R$ é ideal e $S \subset R$ é multiplicativo, então $R/\mathfrak{a}$ e $S^{-1}R$ são Noetherianos

<u>Dem</u>: Relação entre ideais de $R/\mathfrak{a}$

e $S^{-1}R$ e ideais de R. $\square$

<u>Prop</u> (Cohen) R é Noetheriano sse

$\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ $\mathfrak{p}$ é f.g.

<u>Dem</u>: Dada uma cadeia $\{\mathfrak{a}_\lambda\}$ de ideais ñ f.g. Seja

$$\mathfrak{a} := \bigcup_\lambda \mathfrak{a}_\lambda$$

Então $\mathfrak{a}$ ñ é f.g.

$\therefore$ $\{\mathfrak{a}_\lambda\}$ é cadeia majorada

Ideia: aplicar Zorn para encontrar um ideal $\mathfrak{p} \subset R$ que é maximal entre ideais $\bar{n}$ f.g.

<u>A provar</u>: $\mathfrak{p}$ é primo.

$\square$

<u>Teorema de Base de Hilbert</u>: Se R é Noetheriano então $R[X]$ tb o é.

<u>Dem</u>: Seja $\mathfrak{a} \subset R[X]$ ideal e seja

$$\mathfrak{b}_n := \left\{ a \in R \,\middle|\, \exists_{f \in \mathfrak{a}} : f = aX^n + c_{n-1}X^{n-1} + \dots + c_0,\ c_i \in R \right\}$$

É fácil de ver que

$$\mathfrak{b}_0 \subset \mathfrak{b}_1 \subset \mathfrak{b}_2 \subset \dots$$

logo $\exists_n : \mathfrak{b}_n = \mathfrak{b}_{n+1} = \dots$

$\mathfrak{b}_n$ é f.g. logo $\exists \{f_i\} \subset \mathfrak{a}$

tq. $\#\{f_\lambda\} < \infty$ e

$$f_\lambda = a_\lambda X^{n_\lambda} + c_{n_\lambda - 1} X^{n_\lambda - 1} + \cdots$$

e. $\langle \{a_\lambda\} \rangle = I_n$

<u>A provar</u>: $\langle \{f_\lambda\} \rangle = I$

Seja $f \in I$ tq. $\deg f = 0$.

Então $f \in I_0$. Por indução no $\deg f$.

Se $f = aX^m + c_m X^{m-1} + \cdots + c_0$

seja $g \in \langle \{f_\lambda\} \rangle$ t.q.

$$\deg(f - g) < m$$

Por indução em n, segue $f \in \langle \{f_j\} \rangle$.

$\boxed{\Xi}$

<u>Cor</u>: R Noetheriano $\Rightarrow$

$$R[X_1, \ldots, X_n]$$

é Noetheriano.

<u>Cor</u>: Se R é Noetheriano e R' é uma R-álgebra f.g., então R' é Noetheriano.

<u>Dem</u>: Se $x_1, \ldots, x_n \in R'$ são t.q. $R[x_1, \ldots, x_n] = R'$, então

$$R' \simeq R[X_1, \ldots, X_n] / \mathfrak{a}$$

para algum $\mathfrak{a} \subset R[X_1, \ldots, X_n]$ ideal. $\boxed{\Xi}$

Cor.: Se R é $\mathbb{Z}$-álgebra f.g. ou k-álgebra f.g. (k corpo), então R é Noetheriano.

Módulo Noetherianos

Def.: Um R-módulo M diz-se Noetheriano se $\forall N \subset M$ submódulo é f.g.

Prop: ASASE:

1. M é Noetheriano
2. (CCA) toda a cadeia ascendente de submódulos estabiliza
3. (CM) todo o conjunto não vazio de

submódulos de M tem um elemento maximal.

Dem: Exercício

$\boxtimes$

Prop: Sejam $M \in R$-mod e $N \subset M$ um submódulo.

(1) $N, M/N$ f.g. $\Longrightarrow M$ f.g.

(2) N e M/N Noetherianos $\Longleftrightarrow M$ Noetheriano

Dem (1) claro.

(2) Dado $P \subset M$ submódulo. Seja $\pi : M \twoheadrightarrow M/N$. Temos suc. exata

$$0 \to P \cap N \to P \xrightarrow{\pi} \pi(P) \to 0$$
$$\pi(P) = P / P \cap N$$

Se N e M/N são Noetherianos, então $P \cap N$ e $\pi(P)$ são f.g., logo P é f.g.

$\boxed{\xi}$

<u>Lema</u>: Seja

$$0 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} P \to 0$$

uma seq. exata de R-módulos e sejam $M_1 \subset M_2 \subset M$ submódulos. Então

$M_1 = M_2$ sse

$$M_1 \cap \ker\pi = M_2 \cap \ker\pi \quad e \quad \pi(M_1) = \pi(M_2)$$

<u>Dem</u>: óbvio

$\square$

<u>Prop</u>: Seja $0 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} P \to 0$ um suc. exata de R-módulos. Então

M é Noetheriano $\iff$ N e P são Noetherianos

<u>Dem</u>: $M' \subset M$ submódulo é f.g.

ssc

$M' \cap iN$ e $\pi M'$ são f.g.

$\square$

Cor: $M_1, \ldots, M_n \in R$-mod são Noetherianos sse $M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ é Noetheriano.

Dem:

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i \to \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \to M_n \to 0$$

é suc. exata. Aplicar indução em n. $\blacksquare$

Teorema: Seja R um anel Noetheriano e $M \in R$-mod. ASASE:

(1) M é Noetheriano

(2) M é f.g.

(3) M é f.a.

Dem: (1) $\Rightarrow$ (2) ; (3) $\Rightarrow$ (2) : claro

(2) $\Rightarrow$ (1), (3) :

Se M é f.g. tem uma seq. exata curta da forma

$$0 \to K \to R^{\oplus n} \to M \to 0.$$

Como R Noetheriano, $R^{\oplus n}$ é Noetheriano, logo M e K são Noetherianos

$\therefore$ M é Noetheriano

K é f.g. $\therefore$ M f.a.

$\boxed{\xi}$

<u>Teorema</u>: Seja $M \in R$-mod. Seja $R' := R/_{Ann(M)}$. Então M é Noetheriano sse R' é Noetheriano e M é f.g.

<u>Dem</u>: 1. R' Noetheriano e M f.g. com R-mod, tb é f.g. como R'-mod, logo é Noetheriano.

2. M Noetheriano $\Rightarrow \exists\, m_1, \ldots, m_n$ t.q. $M = \langle m_1, \ldots, m_n \rangle$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} R' & \hookrightarrow & M^{\oplus n} \\ x & \longmapsto & (xm_1, \ldots, xm_n) \end{array}$$

$\Rightarrow R'$ é Noetheriano pq é submódulo de um módulo Noetheriano $\boxtimes$

Variedades algébricas afins / k:

Recordar: se k é algebricamente fechado os ideais maximais de $k[X_1, \dots, X_n]$ são da forma

$$\mathfrak{m} = \langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle$$

com $a_1, \dots, a_n \in k$.

Mais: Dado $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in k^n$ o homomorfismo quociente

$$k[X_1, \dots, X_n] \twoheadrightarrow \frac{k[X_1, \dots, X_n]}{\langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle} \simeq k$$

é dado por $f \longmapsto f(\underline{a}) = f(a_1, \dots, a_n) \in k$

Def: Seja k um corpo. Uma variedade (algébrica afim) $/k$ é um conjunto $X \subset k^n$ (algum n) da forma

$$X = V(I) := \{ \underline{a} \in k^n \mid f(\underline{a}) = 0 \ \forall f \in I \}$$

onde $I \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ é ideal

NB: $k[X_1, \ldots, X_n]$ Noetheriano

$$\Rightarrow I = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$$

logo

$$X = V(I) = \{ \underline{a} \in k^n \mid f_i(\underline{a}) = 0 \quad i = 1, \ldots, r \}$$

Notação: $V(I) = V(f_1, \ldots, f_r)$.